MA’RUZA

KO’P O’ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR TUSHUNCHASI. KO’P O’ZGARUVCHILI FUNKSIYANING GEOMETRIK TASVIRI (INTERPRITATSIYASI), LIMITIK QIYMATI VA UZLUKSIZLIGI

Mavzuning rejasi

1. Ko’p o’zgaruvchili funksiya ta’rifi.
2. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning $(z=f(x,y))$ grafigi, agar $z=f(x,y)$ - sirt tenglamasi bo’lsa, uning grafigi sirt yuzasining ko’rinishini ifodalashi, agar u sirt tenglamasi bo’lmay, agar masalan yuzani hisoblovchi ($S=xy$) bo’lsa, $z=xy$ ma’lum sirtni beradi va bu grafik (yuza kattaligining) interpritatsiyasi (ya’ni grafik tasviri) deb atalishi.
3. Belgilab qo’yilgan nuqtadagi, ayniy va limitik qiymati hamda bu nuqtaning uzilish va uzluksizlik nuqtasi tushunchalari.

Tayanch so’z va iboralar: ko’p o’zgaruvchili funksiya, limitik qiymati, uzluksizlik, oshkormas funksiya, uzilish chizig’i.

Ikki va undan ortiq o’zgaruvchili funksiyalar oshkormas holda

$$F(x,y,z,t,...)=0 \qquad (1)$$

ko’rinishda yoziladi. Bu o’zaro umumiy aloqadorlikni (bog’langanlikni) ifodalaydi. Ulardan birining (masalan z - ning) boshqalariga qay darajada bog’liqligini o’rganish zarurati tug’ilganda, uni

$$z=f(x,y,z,t,...) \qquad (2)$$

shaklda yozamiz va buni (1) tenglamaning z ga nisbatan yechilgani deb aytamiz.
Masalan. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va sirtlar mavzusidan bilamizki, ellipsoidning (ikki o’qli) kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0 \qquad (3)$$

ko’rinishda (1-shakl). Ko’rinib turiptiki ellipsoidning har bir nuqtasi (x,y,z) koordinatali nuqtadir. Bu uch o’zgaruvchi o’zaro (3) tenglama bilan bog’langan va bu tenglama funksiya sifatida oshkormas funksiya deyiladi. Agar buni z ga nisbatan yechsak

$$z=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \qquad (4)$$

shaklni oladi. Bu endi ikki o’zgaruvchili oshkor funksiya bo’ldi.

Ikki va undan ortiq o’zgaruvchili funksiyalar ko’p o’zgaruvchili funksiya deyiladi. Ikki o’zgaruvchili funksiya uchun bajarilgan hamma amallar ko’p o’zgaruvchili funksiya uchun ham bir xildir. Shunday ekan soddalik uchun ikki o’zgaruvchili oshkor funksiyani batafsil o’rganamiz.

Aytaylik $z=f(x,y)$ funksiya berilgan bo’lsin.

Ta’rif. $f(x,y)$ - funksiyaga aniq va chekli qiymat bera oladigan barcha (x,y) nuqtalar to’plami bu funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Bundagi x - lar to’plamini $\{x\}=X$ - deb y- lar to’plamini $\{y\}=Y$- deb belgilasak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(X\cup Y)$ deb belgilash mumkin.

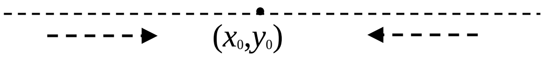
Masalan, $z=\dfrac{1}{x+y}$ (5) funksiya uchun $x+y=0$ dan boshqa barcha qiymatlar z - ga aniq qiymat bera oladi.

$x+y=0$ - bu nima o’zi? Bu $y=-x$ XOY - tekislikdagi, koordinat boshidan o’tuvchi va 2-chi, 4-chi chorak koordinat burchaklari bissektrisasi (to’g’ri chiziq)dir (3-shakl). Demak, (x,y)-

nuqtalardan faqat $x + y = 0$ chiziqga tushmovchilari to'plami berilgan (5) – funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi ya'ni $(X;Y) = ((-\infty;\infty); (-\infty;\infty)) \setminus (x + y = 0)$ berilgan funksiya aniqlanish sohasidir.

Xo'sh. Ko'rilgan misoldagi $(x + y = 0)$ nuqtalarga o'xshash nuqtalar nima deyiladi?

Ta'rif. Berilgan funksiyaga $\pm\infty$- qiymat beruvchi yoki qiymatini noaniq holda qoldiruvchi nuqtalarga funksiyaning uzilish nuqtalari (chiziqlari) deyiladi. Odatda, gumondor nuqtalar limitik yondashuv orqali tekshiriladi: Aytaylik (x_0, y_0)- gumondor nuqta bo'lsin.



Chapdan intilib borilsa,	O'ngdan intilib borilsa,
$x < x_0$	$x > x_0$
$y < y_0$	$y > y_0$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - \\ y \to y_0 -}} f(x,y)$ chap limit	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + \\ y \to y_0 +}} f(x,y)$ o'ng limit

Bular funksiyaning limitik qiymatlari deyiladi.

Bunda $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - \\ y \to y_0 -}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 + \\ y \to y_0 +}} f(x,y) \neq f(x_0, y_0)$ (6)

Holatlarning birontasi bajarilsa, (x_0, y_0) nuqta uzilish nuqtasi bo'ladi.

$$d = \left| \lim_{\substack{x \to x_0 - \\ y \to y_0 -}} f(x,y) - \lim_{\substack{x \to x_0 + \\ y \to y_0 +}} f(x,y) \right|$$ (7) qiymat uzilish qoidasi deyiladi.

Agar $d = |\pm\infty|$ bo'lsa, uzilish II-tartibli (ikkinchi tartibli) deyiladi.

Agar $d < \infty$(ya'ni chekli qadamli) bo'lsa, 1-jinsli (oddiy) uzilish deyiladi.

Grafik nuqtai nazardan olganda uzilish nuqtasida grafik uzilgan bo'ladi.

Agar $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - \\ y \to y_0 -}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 + \\ y \to y_0 +}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ (8)

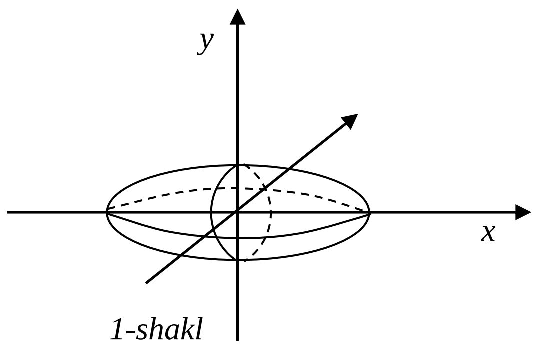
Shart bajarilsa, (x_0, y_0) nuqtada funksiya uzluksiz deyiladi..

Agar (x_0, y_0) nuqta $X \cup Y$ -sohaning ixtiyoriy nuqtasi ($\forall (x_0, y_0) \in X \cup Y$) bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya $X \cup Y$ -sohada uzluksiz deyiladi.

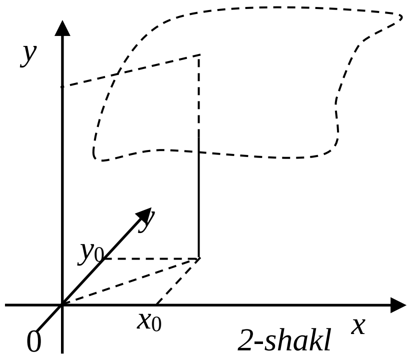
Topshiriq. Agar talaba bu sohani chuqurroq o'rganishni istasa, majmuada ko'rsatilgan adabiyotlarning [1] §4, [4] §19.1, 19.2, 5 larga murojat qilishni tavsiya qilamiz.

Demak, (8) shart bajarilganda funksiya limitga ega deyiladi va

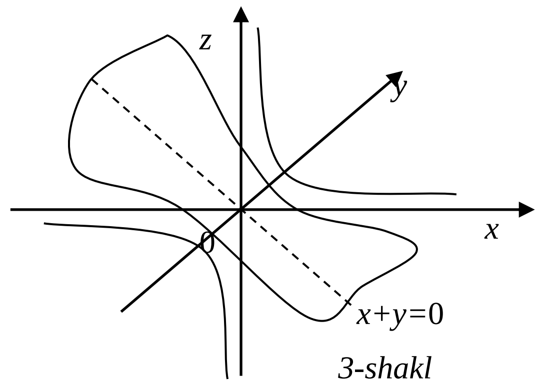
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ qiymat funksiyaning (x_0, y_0) nuqtaga ayniy quymati deyiladi.



1-shakl



2-shakl



3-shakl

$z=\dfrac{1}{x+y}$ fazoviy (3 o'lchovli) tasavvur qiling, bunda XOY - koordinat tekisligini $x+y=0$ $(y=-x)$ chiziqda kesib o'tuvchi $x+y=0$ va XOY tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislikdir. Bu tekislik OZ o'qiga parallel bo'lib, $z=\dfrac{1}{x+y}$ sirt $\left.\begin{matrix} x\to 0 \\ y\to 0\end{matrix}\right\}$ bir yo'la bajarilgan holda ana shu $x+y=0$ tekisligiga (agar $XYZO$ koordinatalar sistemasini yer sirtida qurilgan ya'ni XOY tekisligi yer sirtiga uringan va OZ o'qi yer sirtiga perpendikulyar desak) perpendikulyar sirt unga asimtotik tarzda yaqinlashib keladi. Ikki tomondan ham ammo u bilan kesishmaydi, ya'ni $x+y=0$ tekislik $z=\dfrac{1}{x+y}$ sirt uchun uzilish tekisligidir. (ya'ni $\begin{pmatrix} x+y=0 \\ z\in(-\infty;\infty)\end{pmatrix}$ nuqtalar to'plamidir).

$z=f(x,y)$ funksiya $X\cup Y$ sohada uzluksiz funksiya bo'lsin:

a) $z_0=f(x,y),\ z_1=f(x,y),\ \dots,z_n=f(x,y)$ chiziqlar o'zgarmas z_i qiymatlarga mos (x,y,z_i) nuqtalar to'plami (chiziqlar) bo'lib, ularga sath chiziqlari (линии уровни) deb aytiladi. Bu tushuncha geodeziya, kartografiyada ko'p ishlatiladi va jismlar, ob'yektlarni kesimlar bo'yicha (Z_0 bir kesimni bersa, z_k boshqa kesimni beradi) o'rganishda ishlatiladi.

b) Uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi (ya'ni $z(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots+f_n(x,y)$) ham uzluksiz funksiyadir.

c) Uzluksiz funksiyalarning chekli ko'paytmasi ham uzluksizdir.

d) Uzluksiz funksiyalarning nisbati $\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$ ham uzluksizdir, $\varphi(x,y)\neq 0$ bo'lgan sohada.

e) Uzluksiz funksiyalar ayirmasi $|f(x,y)-\varphi(x,y)|$ chekli miqdordir.

f) Yopiq sohada uzluksiz funksiya shu sohada, chegaralangan va o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi $f_{\min}\le f(x,y)\le f_{\max}\quad (x,y)\in\overline{G}$.